10.2.4 Derivace elementárních funkcí II

Předpoklady: 10203

Př. 1: Urči derivaci funkce $y = x^n; n \in N$.

Budeme postupovat stejně jako předtím dosazením do vzorce:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = x_0^n$$

$$f(x_0 + \Delta x) = x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x_0^{n-2} \Delta x^2 + \binom{n}{3} x_0^{n-3} \Delta x^3 + \ldots + \binom{n}{n} \Delta x^n \text{ (binomická věta)}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x_0^{n-2} \Delta x^2 + \ldots + \binom{n}{n} \Delta x^n - x_0^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\binom{n}{1} x_0^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x_0^{n-2} \Delta x^2 + \ldots + \binom{n}{n} \Delta x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \binom{n}{1} x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} \Delta x + \ldots + \binom{n}{n} \Delta x^{n-1} =$$

$$= n x_0^{n-1}$$

$\Rightarrow$ umíme derivovat všechny mocninné funkce s přirozeným mocnitelem

$$\left(x^3\right)' = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$$

Př. 2: Vypočti derivace funkcí:
a) $y = x^2$ b) $y = x^4$ c) $y = x$

a) $y = x^2$ $\quad \left(x^2\right)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x$

b) $y = x^4$ $\quad \left(x^4\right)' = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$

c) $y = x$ $\quad (x)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$

Př. 3: (BONUS) Urči derivaci funkce $y = \sin x$. Při odvození využit vztahy:
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ a $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = \sin x_0$$

$$f(x_0 + \Delta x) = \sin(x_0 + \Delta x)$$

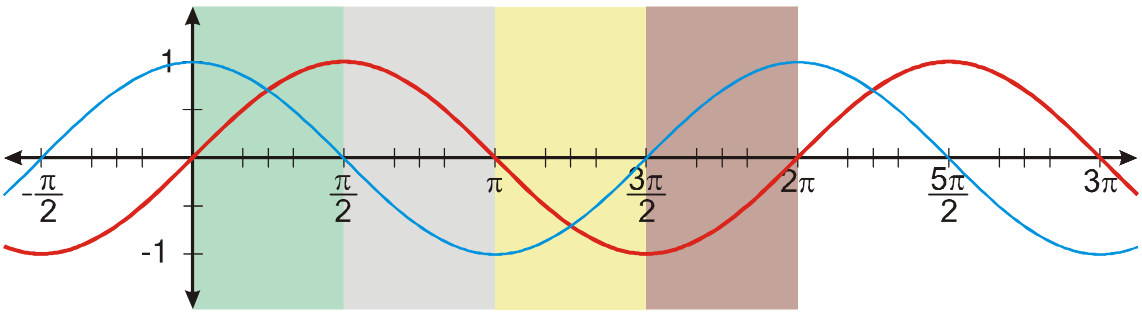
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos \frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} \cdot \sin \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{2\Delta x}{2}} =$$

$$= \cos x_0 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x_0 \cdot 1 = \cos x_0$$

Př. 4: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$. Na obrázku ukaž, jak hodnoty funkce $y = \cos x$ popisují změny hodnot funkce $y = \sin x$.

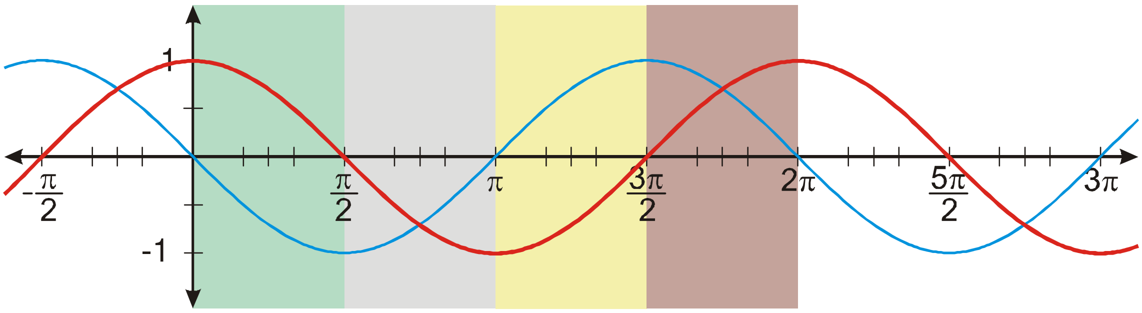


Na obrázku jsou funkce $y = \sin x$, $y = \cos x$

Sledujeme grafy po intervalech:

- $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: funkce $y = \sin x$ roste čím dál pomaleji (strmost křivky se zmenšuje) $\Rightarrow$ derivace musí být kladná, a její hodnoty klesají k nule
- $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$: funkce $y = \sin x$ klesá čím dál rychleji (strmost křivky se zvětšuje) $\Rightarrow$ derivace musí být záporná, a její velikost postupně roste
- $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$: funkce $y = \sin x$ klesá čím dál pomaleji (strmost křivky se zmenšuje) $\Rightarrow$ derivace musí být záporná, a její velikost postupně klesá a hodnoty se blíží k nule
- $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$: funkce $y = \sin x$ roste čím dál rychleji (strmost křivky se zvětšuje) $\Rightarrow$ derivace musí být kladná, a její velikost postupně roste

Př. 5: Nakresli do obrázku graf funkce $y = \cos x$. Do obrázku načrtni graf funkce $(\cos x)'$. Odhadni její předpis.



Sledujeme graf funkce $y = \cos x$ po intervalech:

- $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: funkce $y = \cos x$ klesá čím dál rychleji (strmost křivky se zvětšuje) $\Rightarrow$ derivace musí být záporná, a její velikost postupně roste
- $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$: funkce $y = \cos x$ klesá čím dál pomaleji (strmost křivky se zmenšuje) $\Rightarrow$ derivace musí být záporná, a její velikost postupně klesá a hodnoty se blíží k nule
- $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$: funkce $y = \cos x$ roste čím dál rychleji (strmost křivky se zvětšuje) $\Rightarrow$ derivace musí být kladná, a její velikost postupně roste
- $x \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$: funkce $y = \cos x$ roste čím dál pomaleji (strmost křivky se zmenšuje) $\Rightarrow$ derivace musí být kladná, ale její hodnoty klesají k nule

graf derivace je nakreslen modrou barvou, jedná se zřejmě o funkci $y = -\sin x$

Shrneme si všechny zatím získané vzorce:

- Pro funkci $y = x^n$, $x \in R$, $n \in N$, platí $y' = nx^{n-1}$.
- Pro funkci $y = \sin x$, $x \in R$, platí $y' = \cos x$.
- Pro funkci $y = \cos x$, $x \in R$, platí $y' = -\sin x$.

Stejně jako u limit i u derivací platí vzorce pro sčítání, odčítání, násobení a dělení:

Věta o derivaci součtu, rozdílu a součinu s konstantou:
Nechť jsou dány funkce *u*, *v* a konstanta $c \in R$. Jestliže funkce *u*, *v* mají v bodě x_0 derivaci, mají v bodě x_0 derivaci i funkce $u+v$, $u-v$ a cu a platí:

- $(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$
- $(u-v)'(x_0) = u'(x_0) - v'(x_0)$
- $(cu)'(x_0) = c \cdot u'(x_0)$

Zkrácený zápis:

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u-v)' = u' - v'$

- $(cu)' = c \cdot u'$

Př. 6: Vypočti derivace:

a) $(x+\sin x)'$ b) $(2-\cos x)'$ c) $(3x^3)'$

a) $(x+\sin x)' = x' + (\sin x)' = 1+\cos x$

b) $(2-\cos x)' = 2' - (\cos x)' = 0-(-\sin x) = \sin x$

c) $(3x^3)' = 3\cdot(x^3)' = 3\cdot 3x^2 = 9x^2$

Př. 7: Vypočti derivace:

a) $(x^3-2x^2+3x-2)'$ b) $(2\sin x - 3\cos x)'$ c) $(3x^3-2\sin x+1)'$

a) $(x^3-2x^2+3x-2)' = 3x^2-2\cdot 2x+3\cdot 1 = 3x^2-4x+3$

b) $(2\sin x-3\cos x)' = 2\cos x - 3(-\sin x) = 2\cos x + 3\sin x$

c) $(3x^3-2\sin x+1)' = 3\cdot 3x^2 - 2\cos x + 0 = 9x^2 - 2\cos x$

Př. 8: Vypočti derivace:

a) $\left[(x^2-1)^2\right]'$ b) $\left(\frac{x^3+2x^2+x}{x}\right)'$ c) $\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)'$

a) $\left[(x^2-1)^2\right]' = (x^4-2x^2+1)' = 4x^3-2\cdot 2x^1+0 = 4x^3-4x$

b) $\left(\frac{x^3+2x^2+x}{x}\right)' = (x^2+2x+1)' = 2x+2\cdot 1+0 = 2x+2$

c) $\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)' = \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}\right)' = (x-1)' = 1$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti samozřejmě začnou derivovat složenou funkci nebo podíly špatně. Je nutné je zastavit a upozornit, aby používali pouze taková pravidla, která znají a dělení obešli.

Př. 9: Zkus ověřit zda pro derivaci součinu funkcí může platit vzorec $(uv)' = u' \cdot v'$.

Víme, že platí: $(x^5)' = 5x^4$

Napíšeme si x^5 jako součin a zderivujeme ho podle předpokládaného vzorce:

$\left(x^5\right)' = \left(x^3 \cdot x^2\right)' = \left(x^3\right)'\left(x^2\right)' = 3x^2 \cdot 2x = 6x^3$ - špatný výsledek

$\Rightarrow$ vzorec $(uv)' = u' \cdot v'$ neplatí

Př. 10: Petáková:
strana 155/cvičení 19 f_8, f_{11}
strana 155/cvičení 20 g_1, g_4

Shrnutí: „Přirozeným“ způsobem můžeme derivovat pouze součet a rozdíl funkcí.